Μάθημα 1 05/03/2020.

Μιγαδική Ανάλυση (δηλαδή μελέτη αναλυτικών ιδιοτήτων μιγαδικών συναρτήσεων, δηλαδή όρια, συνέχεια, διαφόριση, ολοκλήρωση, όπου μιγαδική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, όπου $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. $z \in \mathbb{C}$ ή καλύτερα το σώμα των μιγαδικών αριθμών $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

=> τι είναι όμως οι μιγαδικοί αριθμοί $z \in \mathbb{C}$

Πριν ξεκινήσουμε: Συγγράμματα? → Μερκουράκης Χατζηαφράτης [θεωρητικό, πολλή ύλη, όχι τόσο καλογραμμένο]

→ Κραβαρίτη: Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση [πολλές ασκήσεις και εφαρμογές, λιγότερες αποδείξεις]

→ Καρακώστας

→ Σημειώσεις:

1) δεν έχουν όλη την ύλη που θα έπρεπε να έχουν [λείπουν ιδίως τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα].

2) μερικά τμήματα θέλουν επεξεργασία [αρκετά τυπογραφικά]

Προτείνω: Σημειώσεις ⊕ ή Μ.Χ (σίγουρα καλό)
ή Κραβαρίτης (για περισσότερες ασκ.)

Προς «συμμόρφωση»

Στη Μιγαδική Ανάλυση παίζουν σημαντικό ρόλο τρεις θεωρήσεις ολόμορφων [= μιγαδικά διαφορίσιμων σε ανοικτό πεδίο ορισμού] συναρτήσεων:

1. Θεώρηση (Cauchy-) Riemann *→
2. Θεώρηση Weierstrass
3. Θεώρηση Cauchy ***→

*→ απαιτεί Α.Λ. III, συγκεκριμένα έννοιες ορίων και παραγώγων διανυσματικών πεδίων

***→ απαιτεί γνώση, καλή - πολύ καλή - άριστη, επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, δηλαδή Α.Λ. IV

Ο συνδυασμός των πιο πάνω θεωρήσεων μαζί με τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου οδηγεί στις πολύ ιδιαίτερες ιδιότητες των ολόμορφων συναρτήσεων.
π.χ. μια ολόμορφη συνάρτηση έχει μιγαδικές παραγώγους οσοδήποτε μεγάλης τάξης.

§. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$

Από που ξεκινάνε όλα αυτά; Γιατί τα εισάγαμε; Τα χρειαζόμαστε; Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση: $\boxed{x^2=-1}$

Προφανώς, δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα αυτή, αφού $\forall\ x\in\mathbb{R}: x^2\geq 0$.

Συνεπώς, πρέπει να επεκτείνουμε το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ [δηλαδή να βρούμε ένα σύνολο που να περιέχει τους πραγματικούς και μέσα σε αυτό το σύνολο να μπορούμε εκτός από για τους πραγματικούς, να κάνουμε πράξεις όπως τώρα, αλλά ακόμα με τους ίδιους κανόνες πράξεων να κάνουμε πράξεις στο νέο αυτό σύνολο αλλά και να μπορέσουμε να λύσουμε την $x^2=-1$.

⟹ (μαθηματικά) Θέλουμε να επεκτείναμε το σώμα [δηλ. και το σύνολο και τις πράξεις] των πραγματικών έτσι ώστε οι νέες γενικευμένες - πράξεις να είναι συμβατές με τις παλιές και όπως είπαμε να υπάρχει στο νέο σύνολο ένας αριθμός με την ιδιότητα $x^2=-1$.

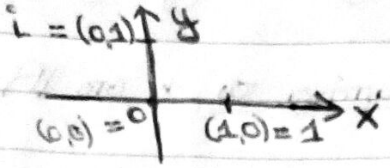
⟹ (άλγεβρα διανυσματικός) η ελάχιστη επέκταση του $(\mathbb{R},+,\cdot)$ είναι ένας χώρος διάστασης δύο πάνω από το $\mathbb{R}$

[διαισθητικά αφού οι αριθμοί πάνω στην πραγματική ευθεία δεν μας φτάνουν θα πρέπει να πάμε στο επίπεδο]

Συνεπώς [και - ελπίζω να έγινε κατανοητό - κατά απόλυτα «μινιμαλιστικό» τρόπο], ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΜΕ "1-1" και "επί" τη μεταθετική ομάδα $(\mathbb{C},+)$ με την $(\mathbb{R}^2,+)$

με ουδέτερο στοιχείο το $0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ που θα αντιστοιχεί στο $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ και θεωρούμε ως διανύσματα βάσης του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ την πραγματική μονάδα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και την φανταστική μονάδα $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ που θα αντιστοιχούν στα $(1,0)\in\mathbb{R}^2$ και $(0,1)\in\mathbb{R}^2$

Comics :



$\Rightarrow$ Κάθε μιγαδικός $z\in\mathbb{C}$ αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ μέσω της αλγεβρικής μορφής

$$z \mathrel{\hat{=}} (x,y) = x\cdot(1,0)+y(0,1) \mathrel{\hat{=}} x\cdot 1 + y\cdot i = x+yi = x+iy$$

δηλ. «εικονάκι» $\boxed{\forall\, z\in\mathbb{C} : \exists\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ με } z=x+iy}$.

$\Rightarrow$ κάθε πραγματικός αριθμός είναι και μιγαδικός

$$x\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C} \Rightarrow x=x\cdot 1 \mathrel{\hat{=}} x\cdot(1,0)=(x,0)\mathrel{\hat{=}} x+0\cdot i$$

Η πρόσθεση $+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ορίζεται μέσω της $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ δηλαδή αν $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ [όπου $x_i,y_i\in\mathbb{R}$, $i=1..2$] έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)\\ &\overset{(\lambda)}{=} (x_1,y_1)+(x_2,y_2)\\ &= (x_1+x_2,\, y_1+y_2)\\ &\overset{(\lambda)}{=} (x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ η πράξη $+$ στο $\mathbb{C}$ έχει όλες τις ιδιότητες που έχει η $+$ στον δ.χ. $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{R}$

[προσεταιριστική, μεταθετική, ύπαρξη ουδέτερου και αντίθετου] όπου ουδέτερο $=0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ με $0\overset{(\lambda)}{=}(0,0)\overset{(\lambda)}{=}0\cdot 1+0\cdot i$

Και αντίθετο $-z$ του $z = x + y\cdot i \overset{(\wedge)}{=} (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$-z = (-x) + (-y)\cdot i \overset{(\wedge)}{=} (-x,-y)$$, αφού τότε:

$$z + (-z) \overset{(\wedge)}{=} (x,y) + (-x,-y) = (0,0) \overset{(\wedge)}{=} 0 .$$

Άσκηση : Το $+$ στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει το $+$ στο $\mathbb{R}$